

20/10/2014

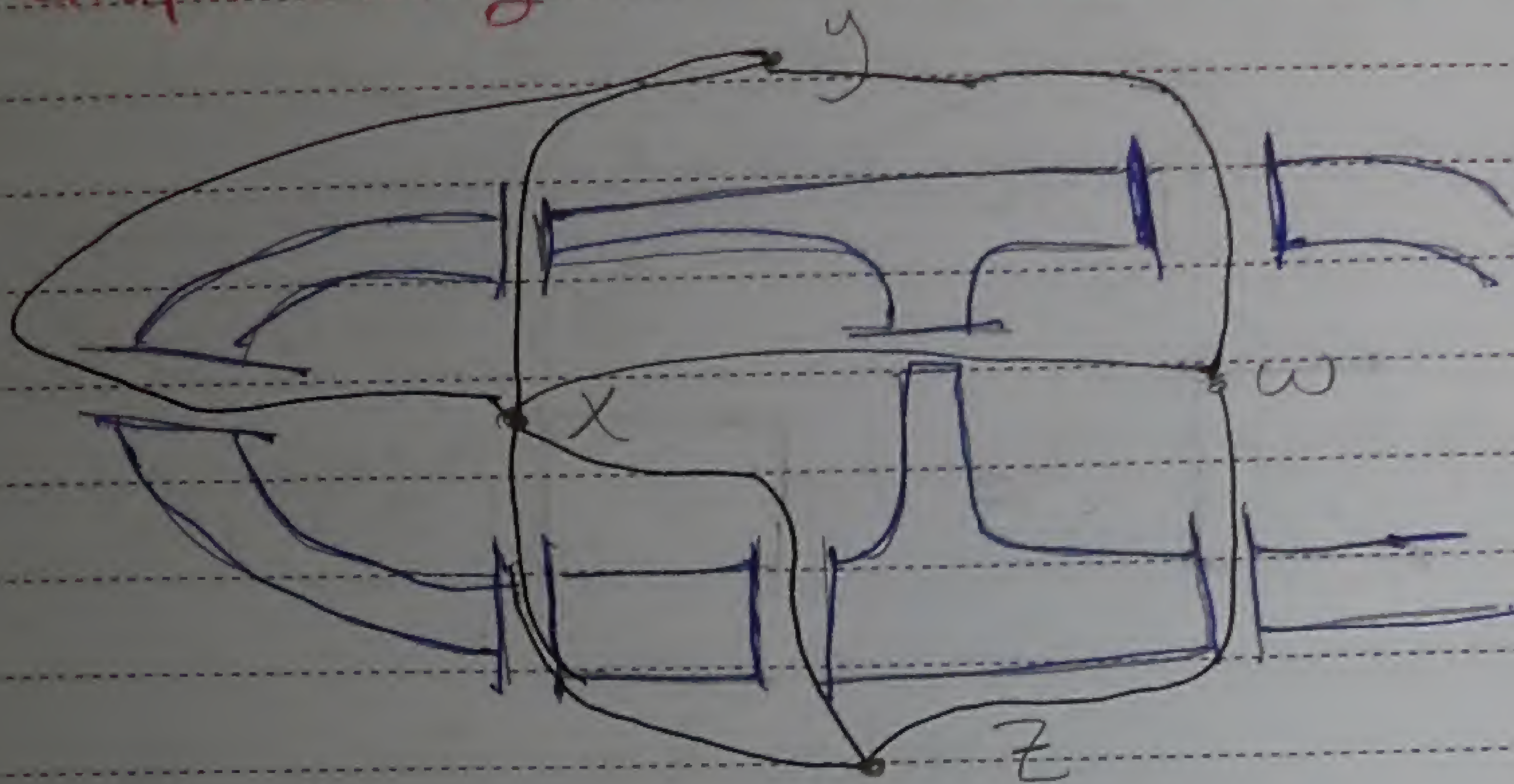
الترسيم

د. محمد شكري

محاضرة 2

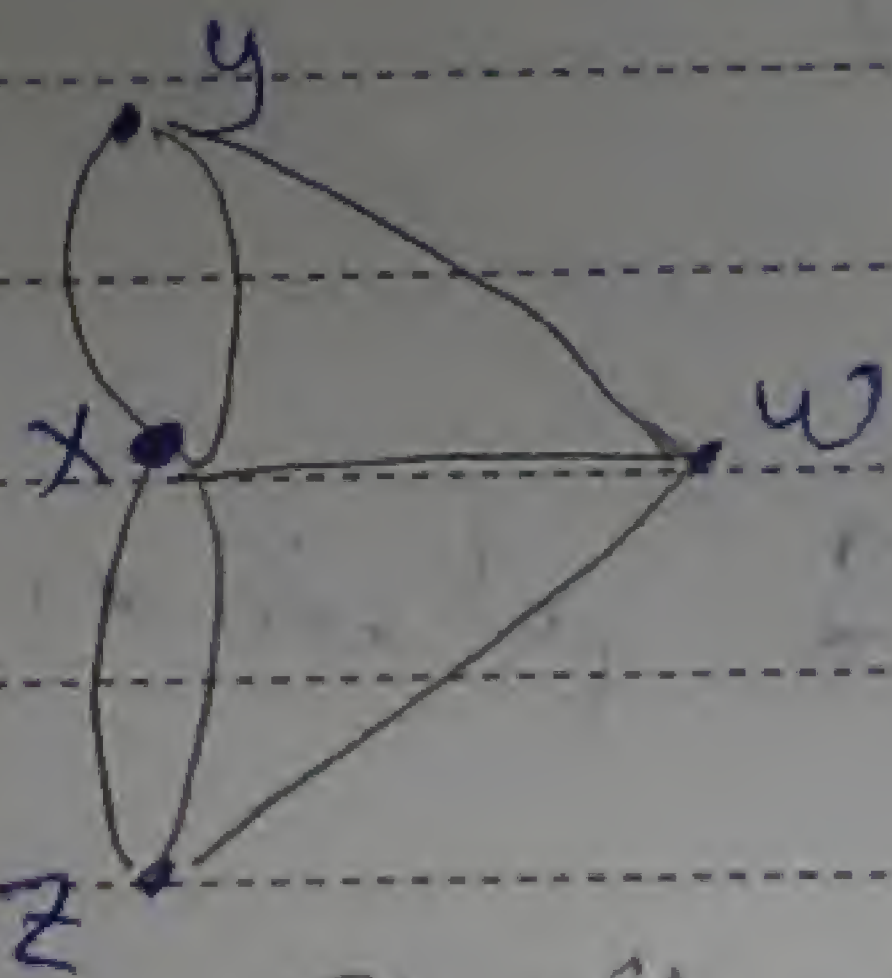
Graph theory

نظرية المخططات



هذه هي نظرية المخططات بواسطة العالم Euler بأنه حاول التفكير في أن يكون طريقاً 7 جزر أي مخطط يمكن المرور على أركان كل حرف مرة واحدة.

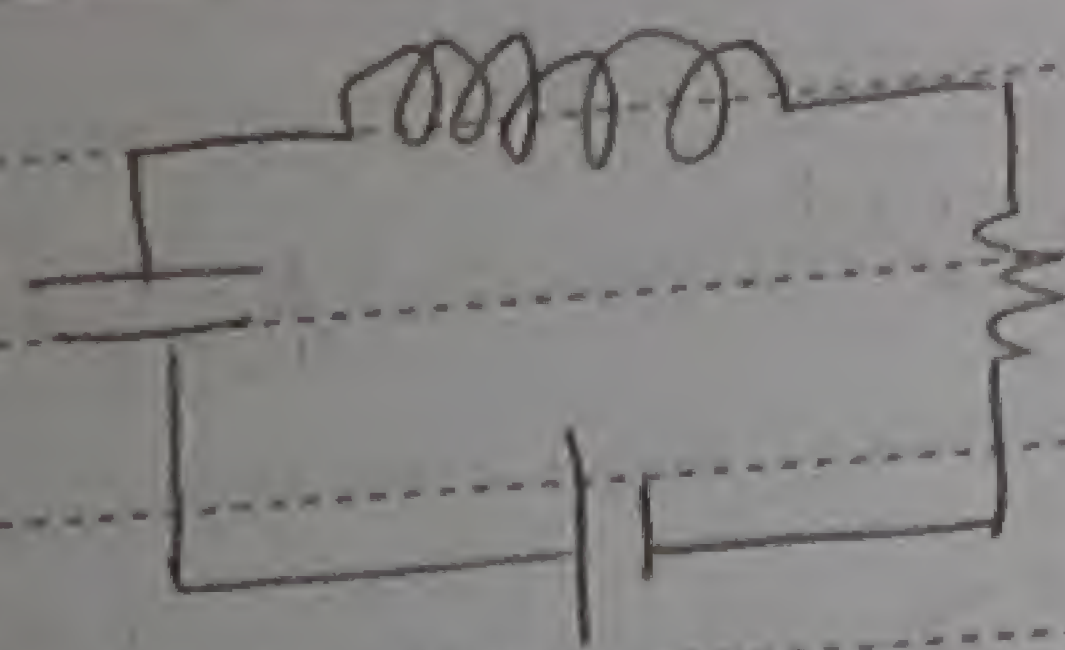
هذه الطريقة للتفكير بدأت تظهر على شكل جبرية بين عدد رؤوس وعدد الحروف وإيجاد علاقات جبرية بينها وطريقة التمييز على المخططات.



هذه الخصائص الهندسية للـ Graph

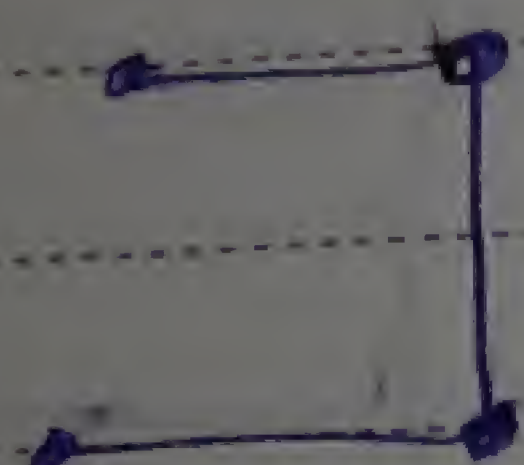
① الدوائر التكرارية

يتم نقل أي دائرة تكرارية إلى مخطط حيث تعبر على الحلق والمقاطع والمكونات ومصدر التيار بالحرف. إذا كان المخطط الناتج Connected أي كل نقطة يمكن أن نوصفها بمسار مغلق، تتكون الدائرة تعبرها جميعاً وإذا أمكن العكس يكون التجميع فائلاً. مثل:



لأنه الملف يظهر S, C والمكثف يظهر C, C

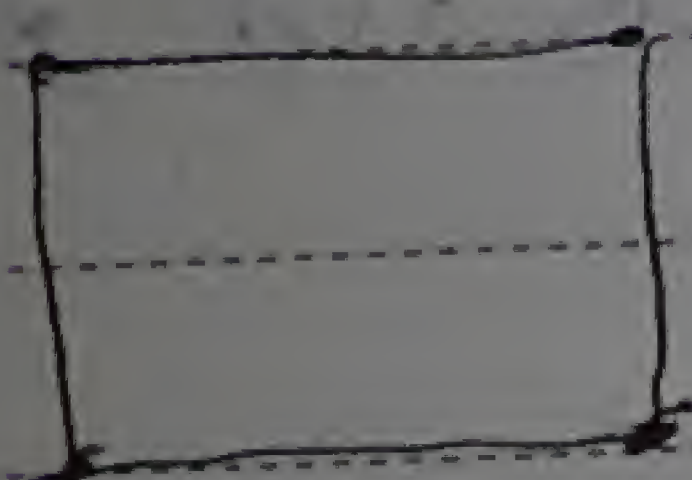
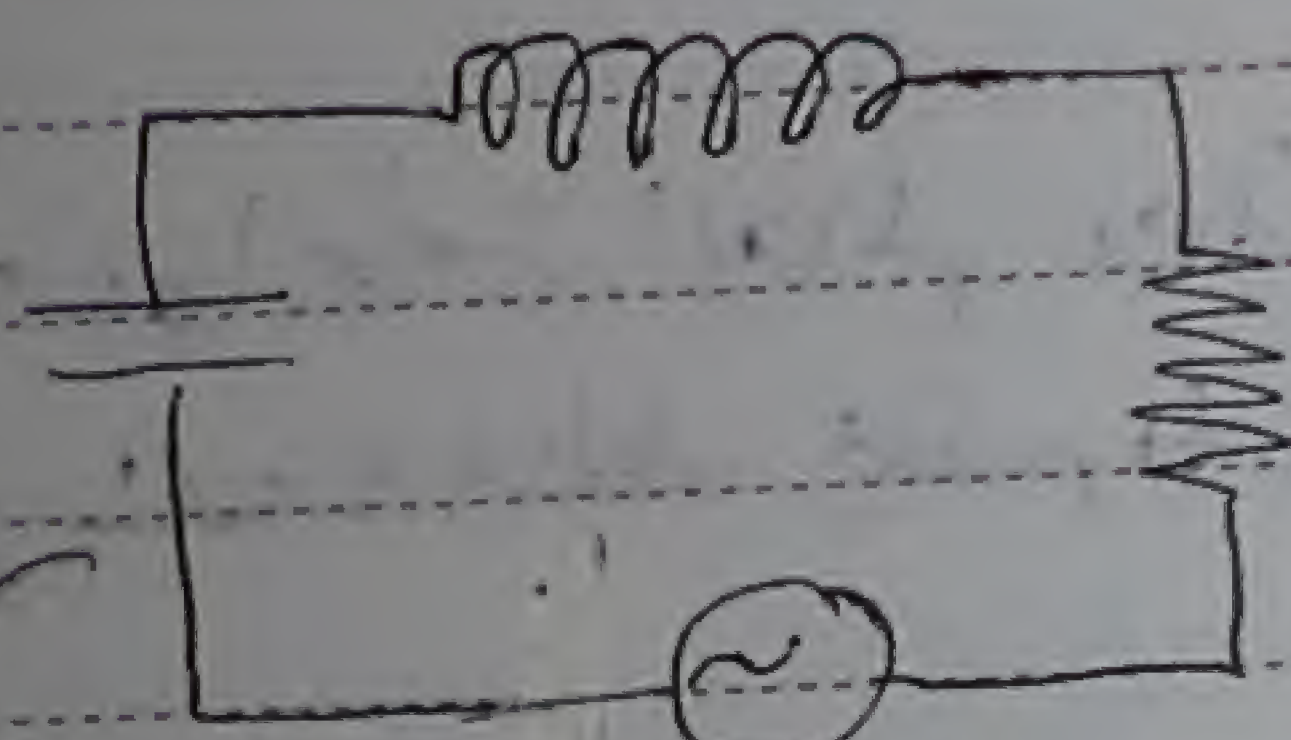
لعبارة أخرى في G



is

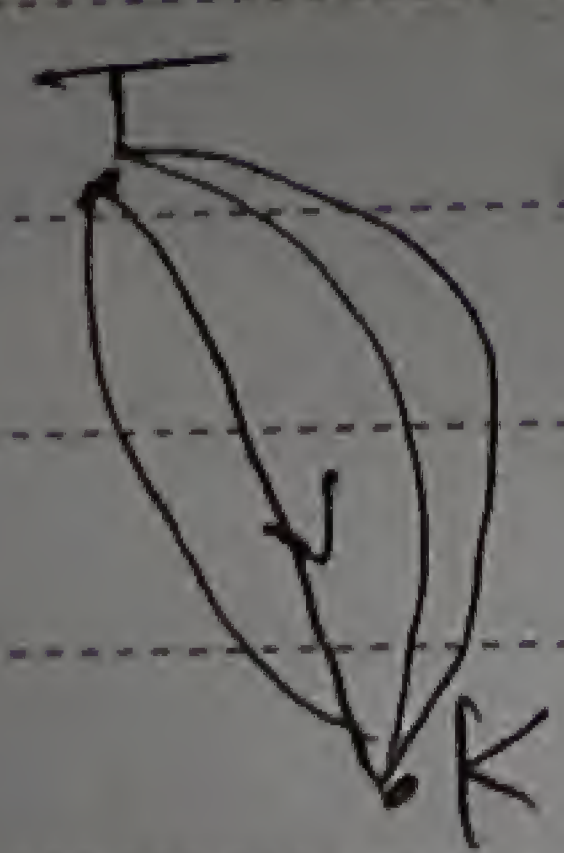


node



Connected

3) استخدام G (Graph) في توصيل طلبة بالفرع



في هذه الجزئية نتعامل مع طلبة على أنها E

مخرجاتهم ومعهم الفرع سيتم العمل على أنماطهم

مناقشة قضايا زيادة عدد الطلاب (G) مثل

كيفية عزل نقطة، كيفية زيادة الـ flow

على طريقتين، كيفية توصيل مدينة جديدة بجميع طلبة المدينة

أهم ما يُقرأ من هذا الجزء هو Ford Algorithm

③ استخدام الـ Image (G) في الـ Image

في تحليل الصور وذلك بعد تقسيم الصورة إلى Pixels وذلك يتم
تحويل المناطق في الصورة ذات اللون معين توصف برأس والشيف
تكونه طريقة الترابط مع الجوار معها.

④ استخدام الـ (G) في دورة التفرع والعصبية

Defⁿ ① Graph

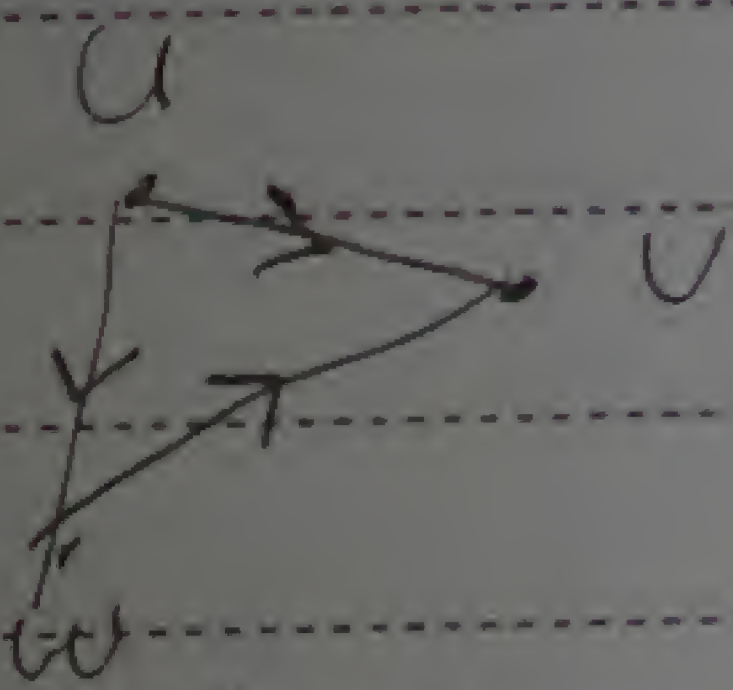
$G = (V, E)$, V set of vertices

المدف هو مجموعة من الرؤوس

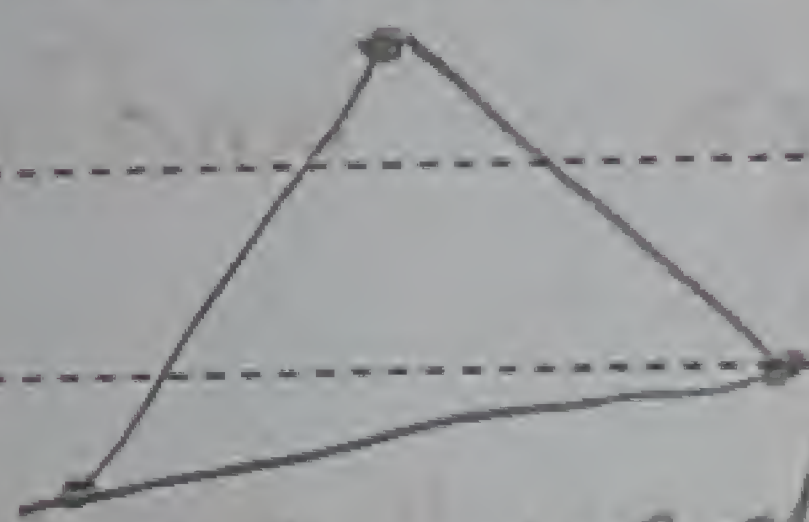
E = set of edges

Defⁿ ② Directed graph

هو مدف يكون اتجاه الحرف فيه مهم مثل :



directed graph

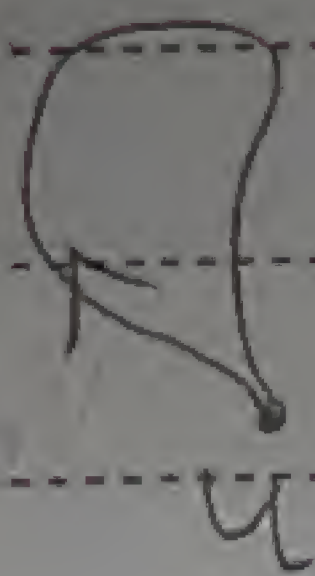
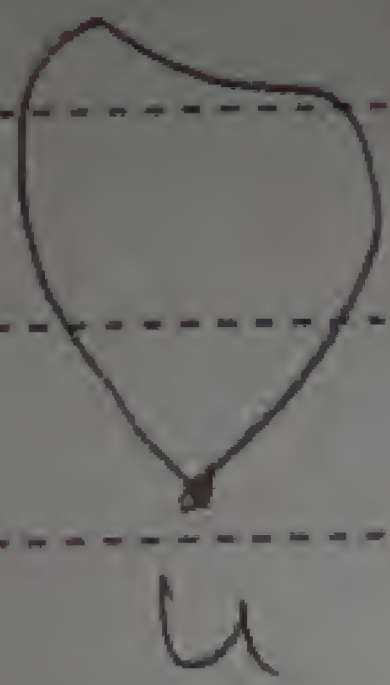


undirected graph

Defⁿ ③ Loop

Edge بين رأسين

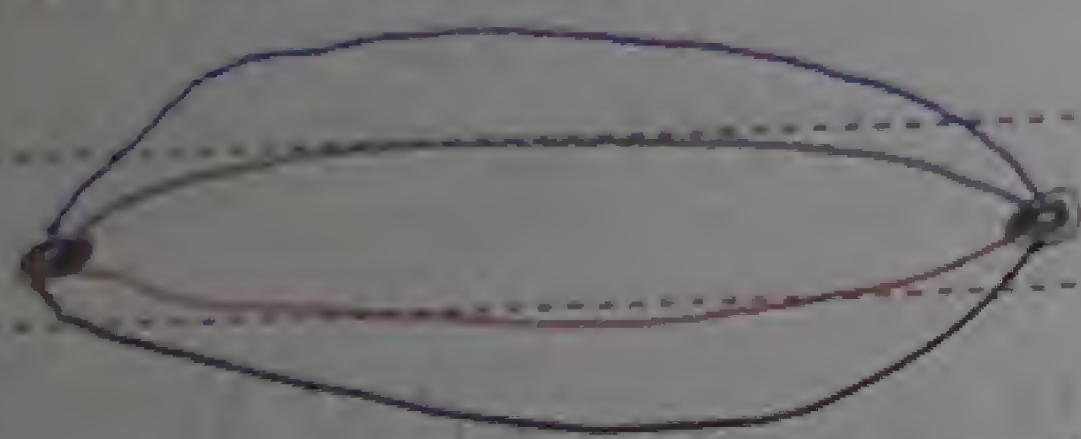
نقطة النقطة



* هو حرف يربط نقطة واحدة بنفسها

④ Multiple edges

أكثر من حافة متصلة

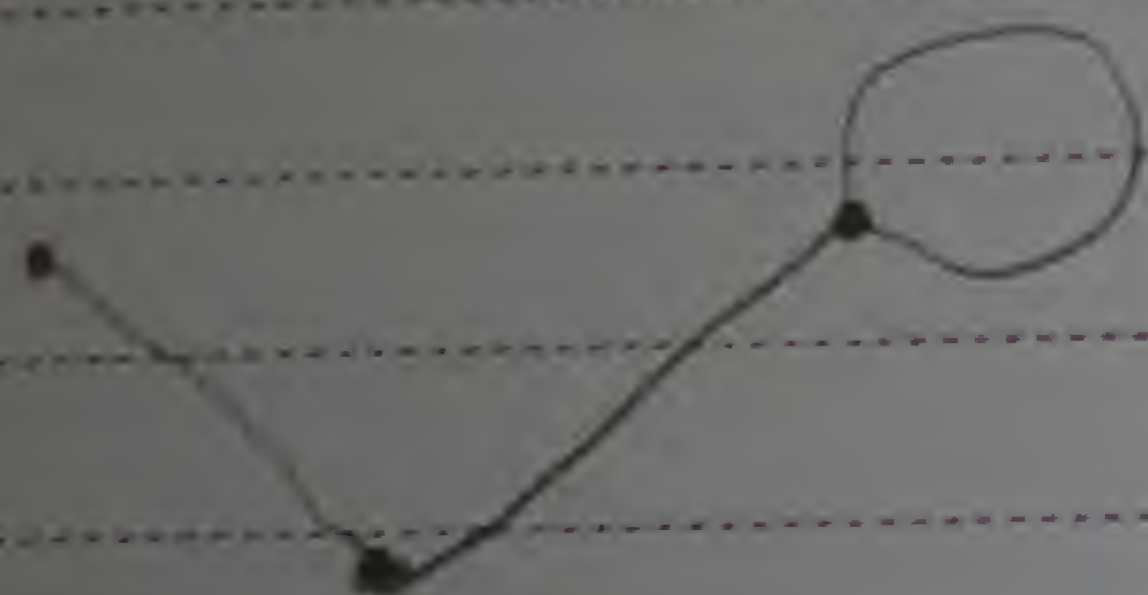


⑤ Multigraph

Multigraph: إذا احتوى على حافة متصلة

⑥ Pseudo graph

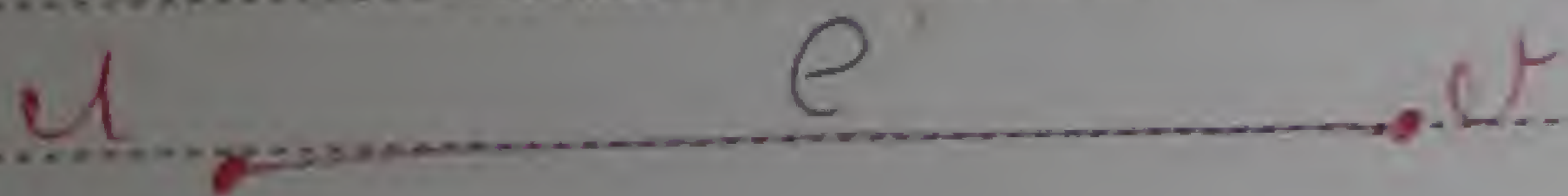
Loop أو حافة ذاتي



Type	Edge	Muti edge	loops
① simple graph	undirected	NO	NO
② Multi graph	Undirected	Yes	NO
③ pseudo graph	undirected	Yes	Yes
④ Directed graph	directed	NO	Yes
⑤ Directed Multigraph	directed	Yes	Yes

Terminology: For undirected graph وصف

① Adjacent, incident, end points



(edge e is) Adjacent u, v متجاوران
 incident e متعلقان u, v (متعلقان بالخط)
 end point نقطة النهاية u, v هي e التي تصل بين النقطتين

u, v are adjacent

u, e and v, e are ~~incident~~ incidents

② degree (v)

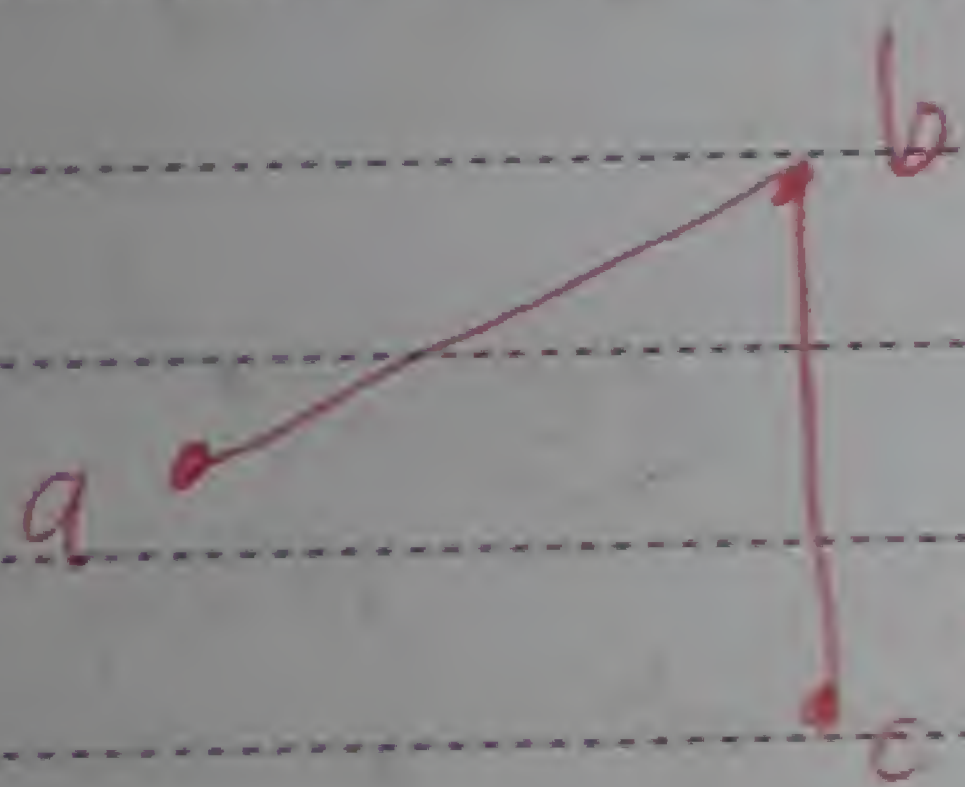
درجة الرأس v هي عدد الحواف المتصلة بالرأس v

Ex:

$$\deg(a) = 1$$

$$\deg(b) = 2$$

$$\deg(c) = 1$$



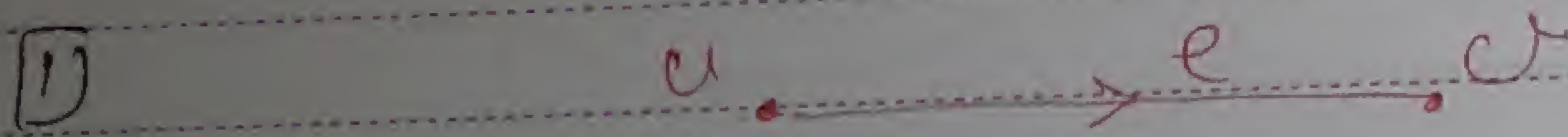
③ Isolated vertex

$\deg(\text{point}) = 0$ هي جميع النقطة التي لا تصل بها حافة

u لا تصل بها edges

④ Pendant Vertex هي الرأس الذي درجتها = 1
عن طريق edge واحدة فقط

Terminology - Directed graph



u is adjacent to v

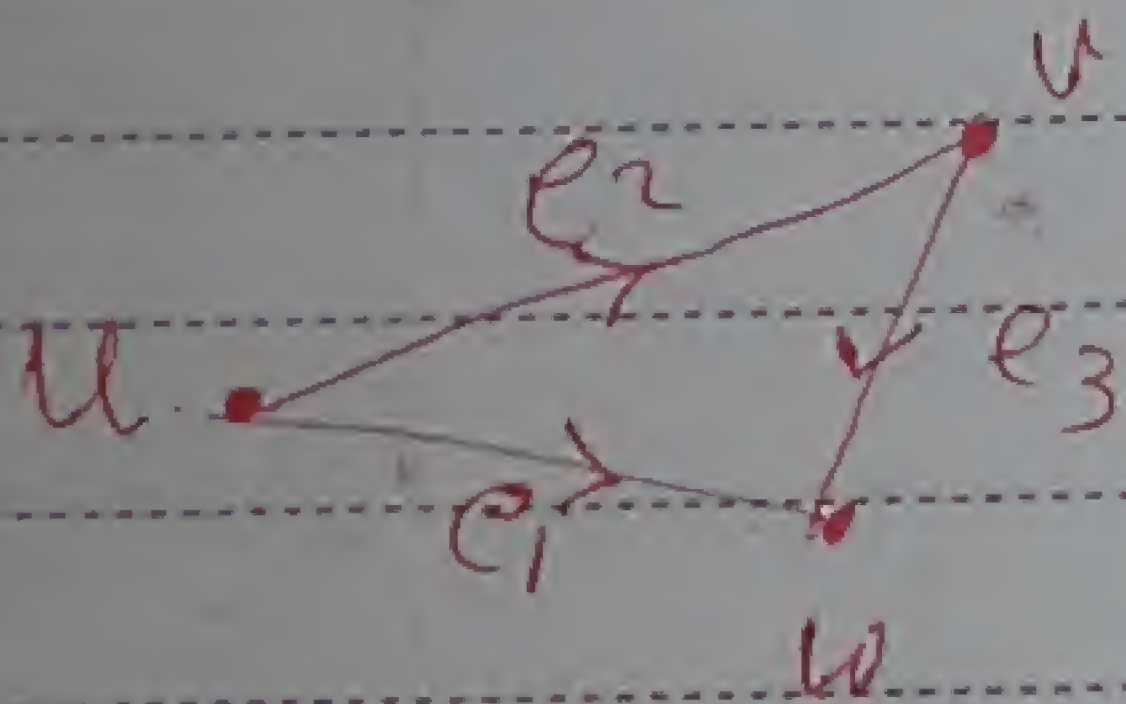
u is ~~initial~~ initial vertex

v is terminal vertex

② In-degree ($\deg^-(u)$) عدد الاضلاع التي تدخل الرأس u
The number of edges for u terminal

③ out-degree ($\deg^+(u)$) عدد الاضلاع التي تخرج من الرأس u

example: Find $\deg^-(u_i)$, $\deg^+(u_i)$ from the graph:-



$$\deg^-(u) = 0$$

$$\deg^+(u) = 2$$

$$\deg^-(v) = 1$$

$$\deg^+(v) = 1$$

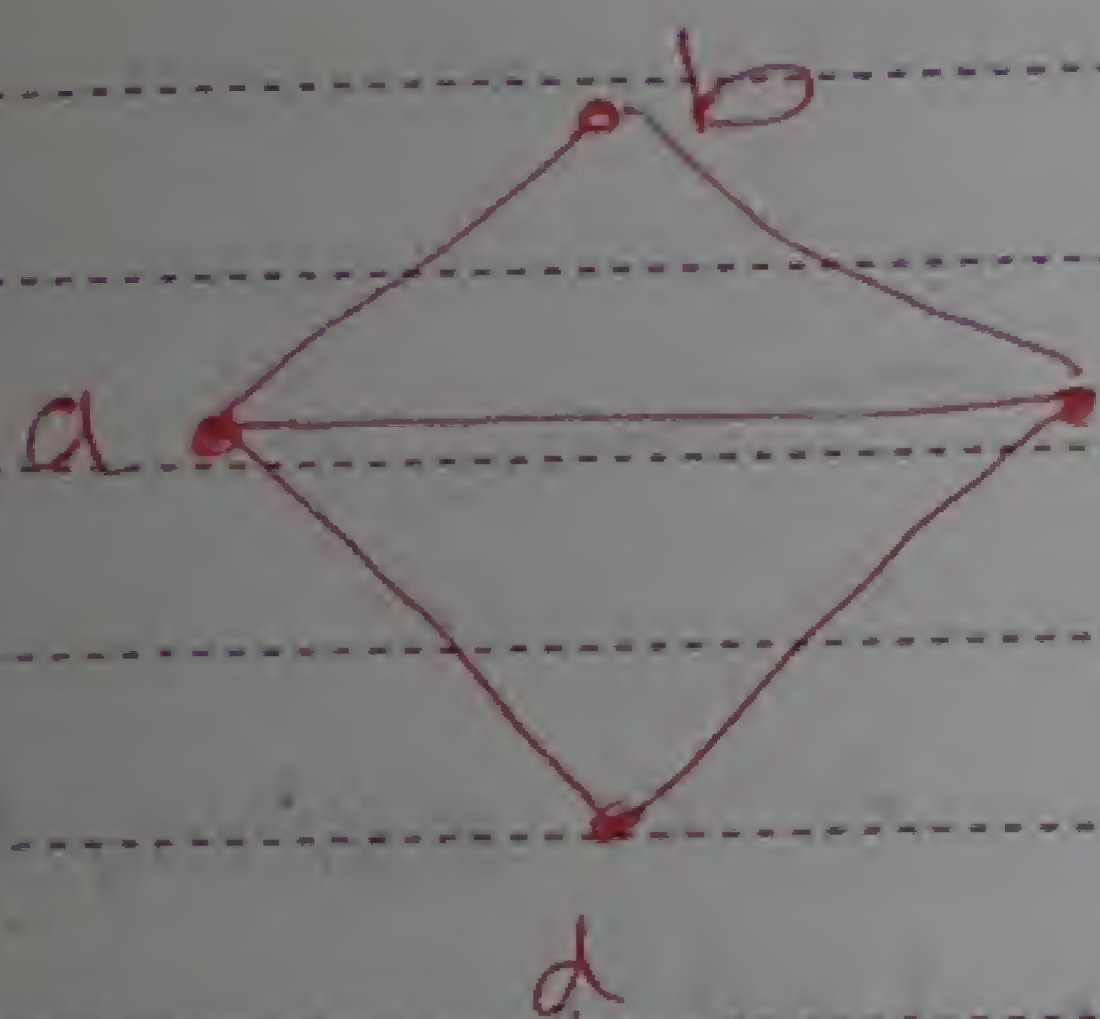
$$\deg^-(w) = 2$$

$$\deg^+(w) = 0$$

Hand Shaking theorem:-

$$2e = \sum_{v \in V} \deg(v)$$

مجموع درجات جميع الرؤوس في نظام
هو ضعف عدد الحواف



$$\deg(a) = 3$$

$$\deg(b) = 2$$

$$\deg(c) = 3$$

$$\deg(d) = 2$$

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 3 + 2 + 3 + 2 = 10$$

$$|E| = \frac{1}{2} (10) = 5$$

Theorem:-

sum of degree for vertices of odd degree in a graph is always even

عدد الرؤوس ذات الدرجة الفردية يكون دائماً زوجي

let V_1 be the set of even degree vertices.

" V_2 " odd "

عدد الرؤوس

$$2|E| = \sum_{v \in V} \deg(v)$$

V_1 تقسم إلى جزئين الأول الرؤوس ذات الدرجة الزوجية

V_2 الثاني الرؤوس ذات الدرجة الفردية

$$2|E| = \sum_{v \in V_1} \deg(v) + \sum_{v \in V_2} \deg(v)$$

زوجي

عدد رؤوس

عدد رؤوس

مميز آخر معادلة

الحمد الأول لا بد أن يعطين عدد زوجي لأن مجموع الأعداد الزوجية دائماً عدد زوجي، والطرف الآخر يساوي عدد زوجي

$$\sum_{v \in V_2} \deg(v) \text{ is even number}$$

Ex:

Show that if G is a simple graph

then

$$|E| \leq \binom{|V|}{2}$$

طوله مجموع ١ و ٢

توافق

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

الحل

① نستخدم الاستنتاج الرياضي في الإثبات، نثبت العلاقة في حالة فرد واحد

② نثبت صحة العلاقة في حالة n عدد الزوجي، m عدد الفرد

③ نثبت صحة العلاقة في حالة $(n+1)$ عدد الزوجي

$$\text{at } G = (V, E); |V| = n; |E| = m$$

$$|E| = 1; \binom{|V|}{2} = \binom{2}{2} = \frac{2!}{2!0!} = 1$$

$$|E| \leq \binom{|V|}{2}$$

يتحقق المعادلة

نفرض صحة العلاقة عند n عدد الرؤوس

Cardinality $m \leq \binom{n}{2} \Rightarrow C_2^n$

$|V|=n$; $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$

$|E|=m$; $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$

prove the relation at $|V|=n+1$

أضف رأس v فيكون عدد الرؤوس $n+1$
 وعدد حواف الحظيرة $m+1$ حيث m هو عدد
 الحواف التي تم توصيلها مع الحظيرة (الرأس الجديد)
 ويكون هذا العدد m (1) إلى n $n \geq 1$

prove that

$|m+1| \leq C_2^{n+1}$

$$C_2^{n+1} = \frac{(n+1)!}{2!(n-1)!} = \frac{(n+1)n}{2} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$$

$$C_2^n = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}$$

$$\Rightarrow m < \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} \rightarrow (1)$$

$$C_2^{n+1} = \underbrace{\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}}_{(1)} + \underbrace{\frac{n}{2} + \frac{n}{2}}_n$$

$$C_2^{n+1} > m+n > m+1$$

then $m+1 \leq C_2^{n+1}$ So.

$$|E| \leq C_2^{|V|}$$

3/11/2014

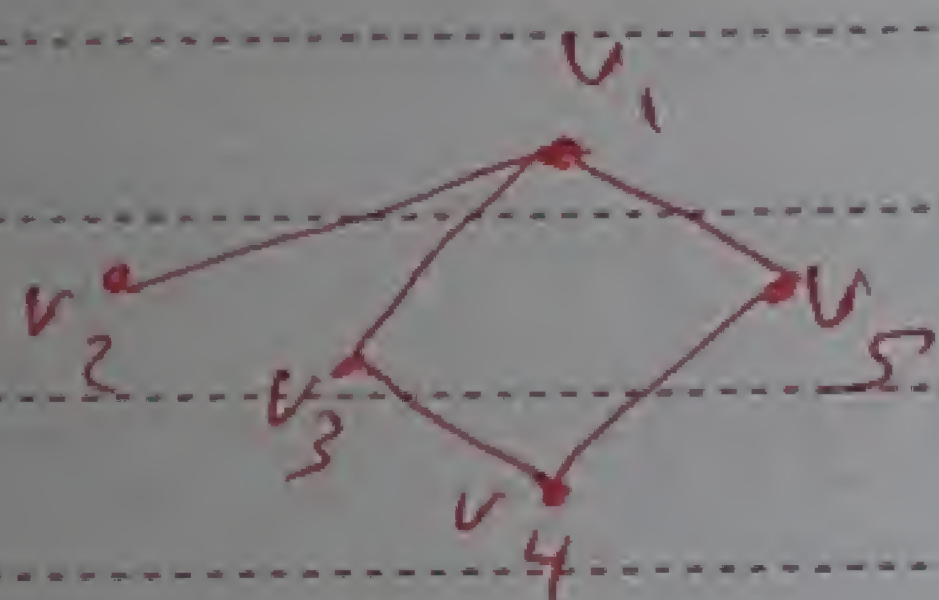
د. محمد بكر

في فترة (4)

① Defⁿ: The neighbours of vertex v_i is the set of all vertices adjacent to the vertex v_i

$N_G(v_i)$

Ex: Find $N_G(v_1)$ from the graph:



الحل

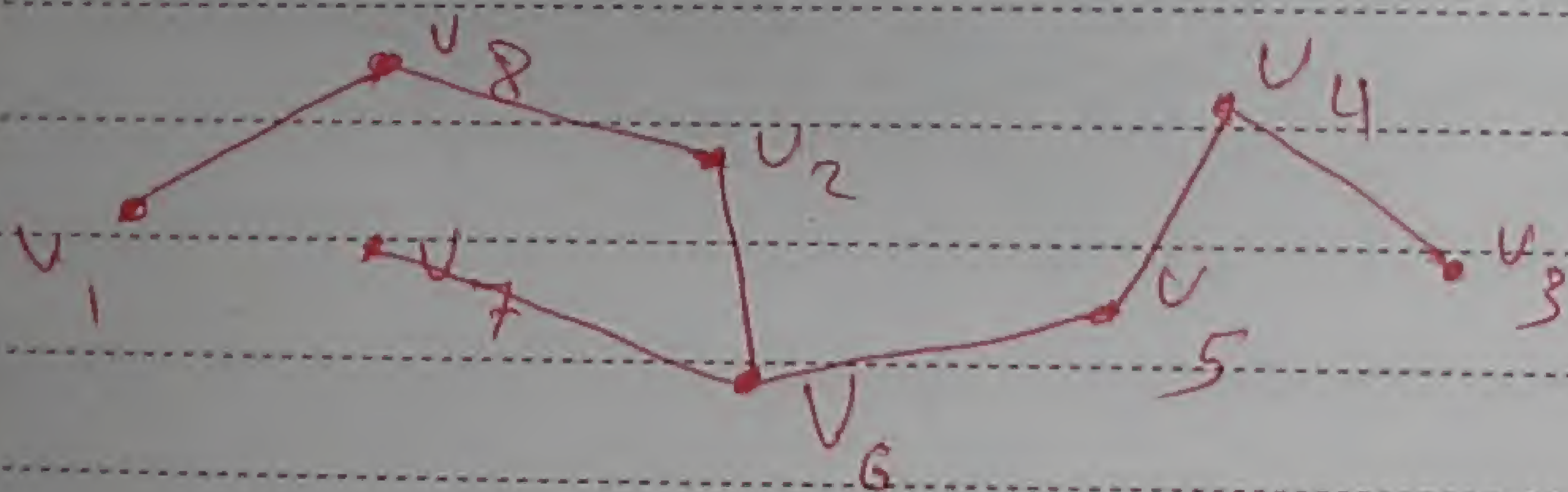
$$N_G(v_1) = \{v_2, v_3, v_5\}$$

② Defⁿ: The neighbours of a set of vertices S is defined as

$$N_G(S) = \{v_i : v_i \in V \mid \exists u \in S : u v_i \in E \text{ } \forall u \in S\}$$

فئة v_i في مجاورة S اذا كانت v_i متصلة مع كل $u \in S$ في G

Ex: Find $N_G(S)$; where $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ and $G = (V, E)$



$$N_G(s) = \{v_2, v_6, v_4\}$$

مجاورة الرأس s مع الرأس s ولا تأخذ الرأس s نفسه

① Defⁿ: minimum degree

If $d(v)$ is the degree of a vertex,

$\delta(G)$ is the minimum degree.

$$\delta(G) = \min \{d(v) : v \in V\}$$

هو أقل درجة رأس في الرسم (أي نوعه) كل الرؤوس ونختار أصغرها.

② Defⁿ: Maximum degree

$$\Delta(G) = \max \{d(v) : v \in V\}$$

هو أكبر درجة لرأس في الرسم

③ Defⁿ: K-regular graph.

The graph is K-regular if

$$\Delta(G) = \delta(G) = K$$

الرسم منتظم إذا كانت الرؤوس جميعها متساوية

Ex: Find graphs satisfy

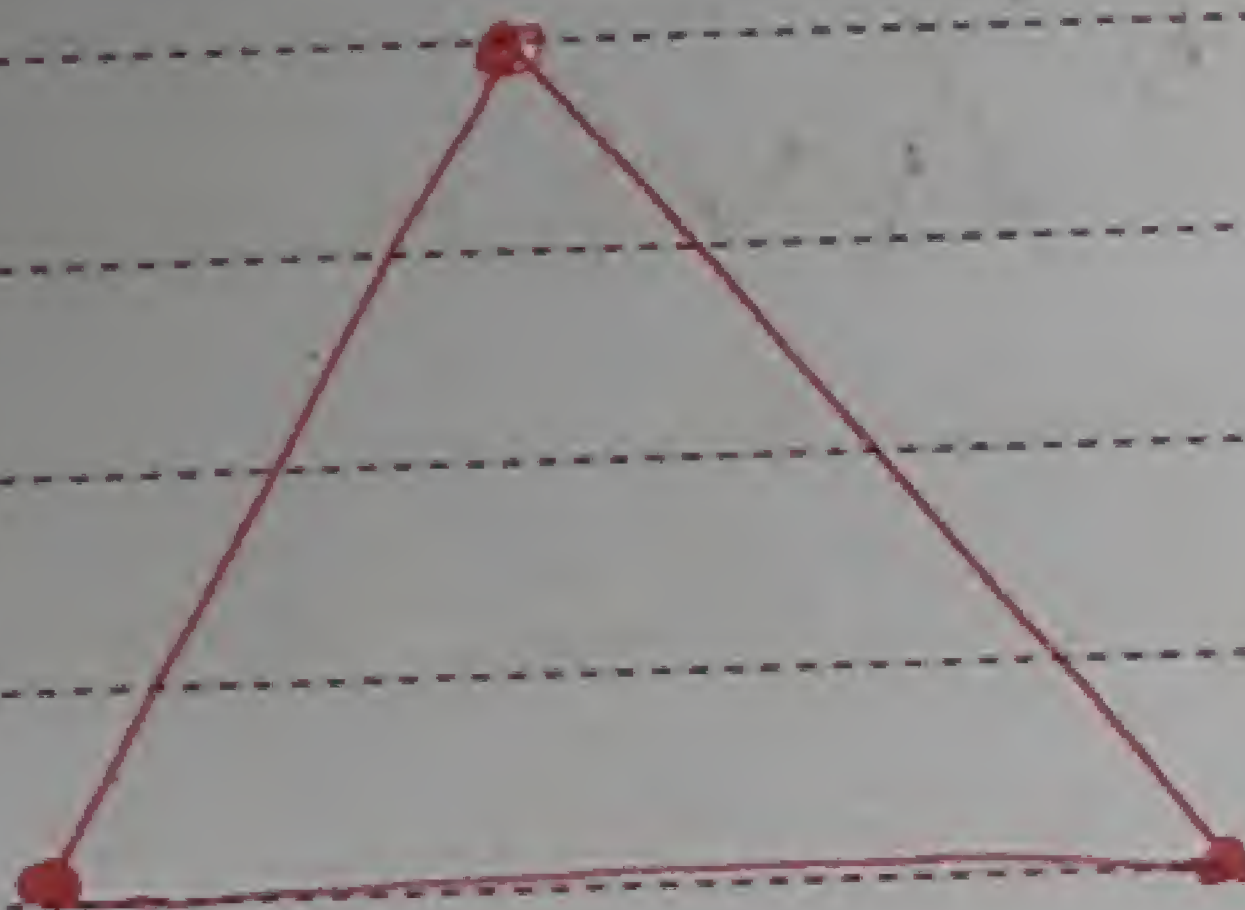
(a) 2-regular graph.

(b) 3-regular graph

(c) 4-regular graph.

الـ 1

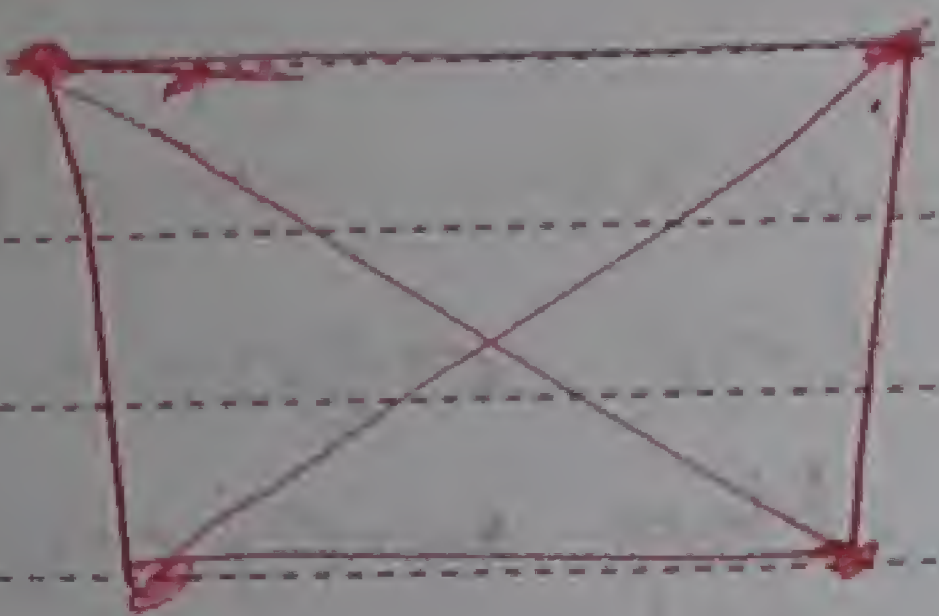
①



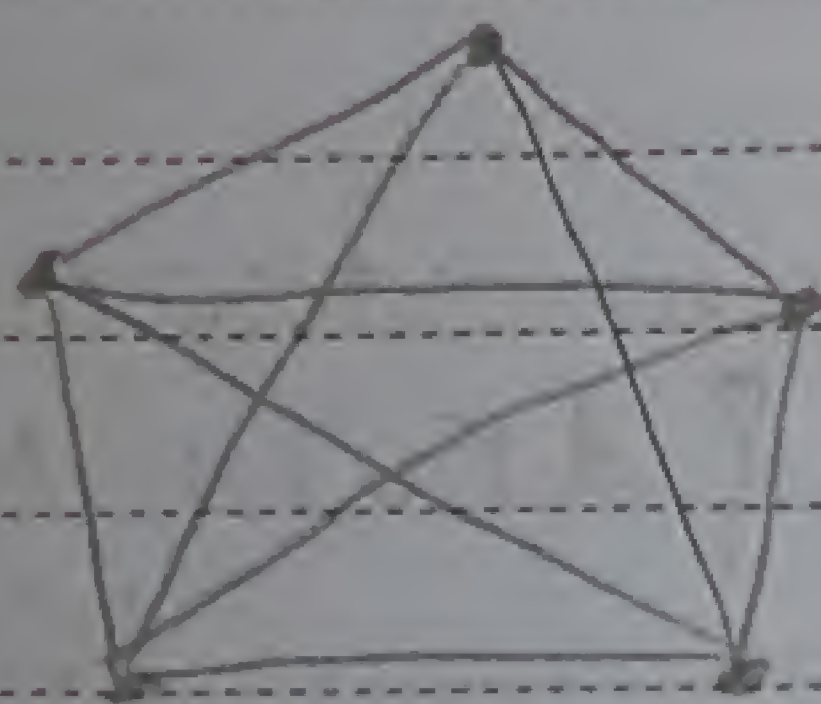
2-regular

(b) 3-regular

لا حظ على الأقل لازم عدد الرؤوس متساوي أكبر من
الدرجة (3) على الأقل.



(c) 4-regular



The

4) Defn: the average degree of $G = (V, E)$

$$d(G) = \frac{1}{|V|} \sum_{v \in V} d(v)$$

عدد الرؤوس

مجموع درجات كل الرؤوس

مساوي المقادير

$$2\text{-regular} \Rightarrow \frac{1}{3} * (2+2+2) = \frac{6}{3} = 2$$

5) The average Quantifies degree

$$e(G) = \frac{|E|}{|V|}$$

عدد الحواف

عدد الرؤوس

ex: prove that $E(G) = \frac{1}{2} d(G)$ where
 $E(G)$ is average quantifies and
 $d(G)$ is average degree

Handshake

مسألة المصافحة (Handshake)

$$\sum d(v) = 2 |E|$$

بقيّة الطرفية $|V|$

$$\frac{1}{|V|} \sum d(v) = \frac{2|E|}{|V|}$$

↓

↓

$$d(G) = 2E(G)$$

$$E(G) = \frac{1}{2} d(G)$$

Proposition:

Every graph $G = (V, E)$ with at least one edge has a subgraph H with

$$d(H) \geq E(H) \geq E(G)$$

proof:

To construct H from G delete vertices of small degree one by one, until only vertices of large degree remain.

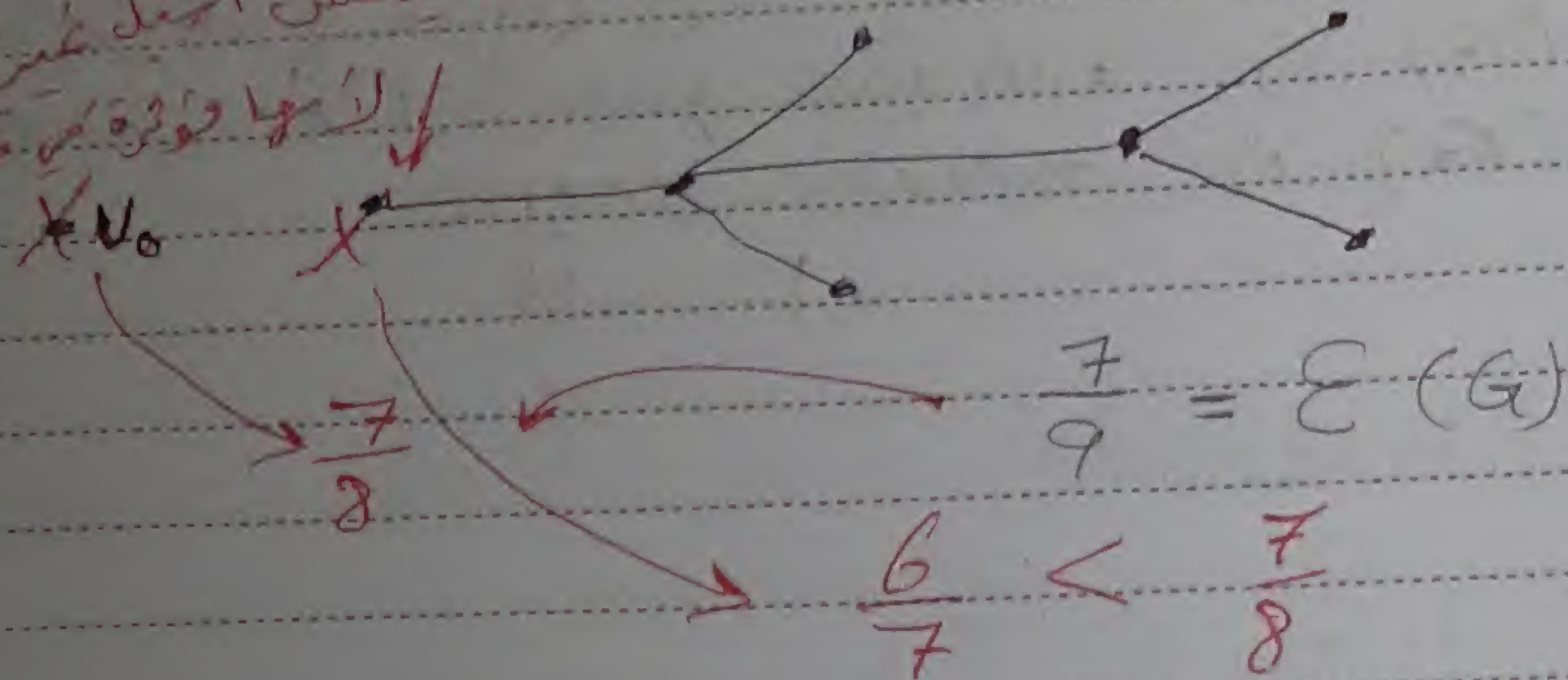
كل حافة له طرف واحد على الأقل يمكن حذفه من G

بقيّة الطرفية $|V|$

فقدنا من الحافة G رأس واحد على الأقل من G

إلى الرؤوس ذات الدرجة العالية H

مستحق أن يترك في مكانها
لأنها تؤثر على قيمة ϵ



أقل درجة ممكنة هي $v_0 = 0$

$$\epsilon(G) = \frac{7}{9}$$

عند حذف رأس v_0 تزداد القيمة لأن المصمم صغير $\frac{7}{8}$

$$\frac{7}{9} < \frac{7}{8}$$

Up to which degree $d(u)$ can afford to delete a vertex u , without lowering ϵ .
we construct a sequence

$$G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \dots \supseteq G_i \supseteq G_{i+1} \text{ etc.}$$

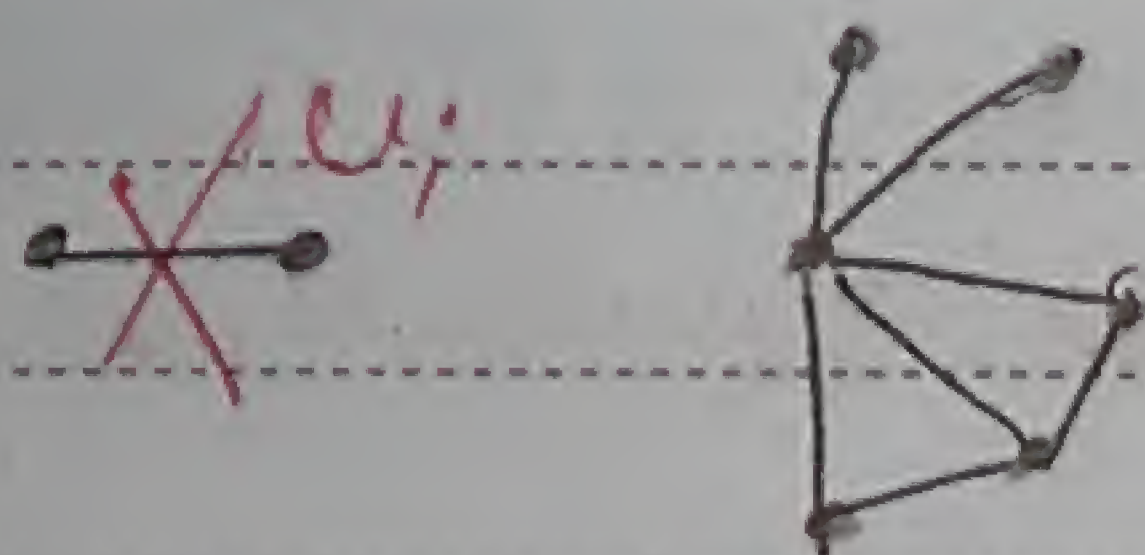
If G_i has a vertex u_i of degree

$$d(u_i) \leq \epsilon(G_i)$$

then $G_{i+1} = G_i - u_i$; ~~$H = G_i$~~ $H = G_{i+1}$

if $\epsilon(G_{i+1}) > \epsilon(G_i)$ then

$$H = G_i$$



So that there exist H satisfy eqn (*)

↓
راجع المسألة السابقة

إذا وجد رأس u أقل الدرجات في المخطط تحقق أنه $d(u_i) < E(G_{i+1})$

احذف هذه الرأس ويكون المخطط الجديد هو

$$H = G_{i+1}$$

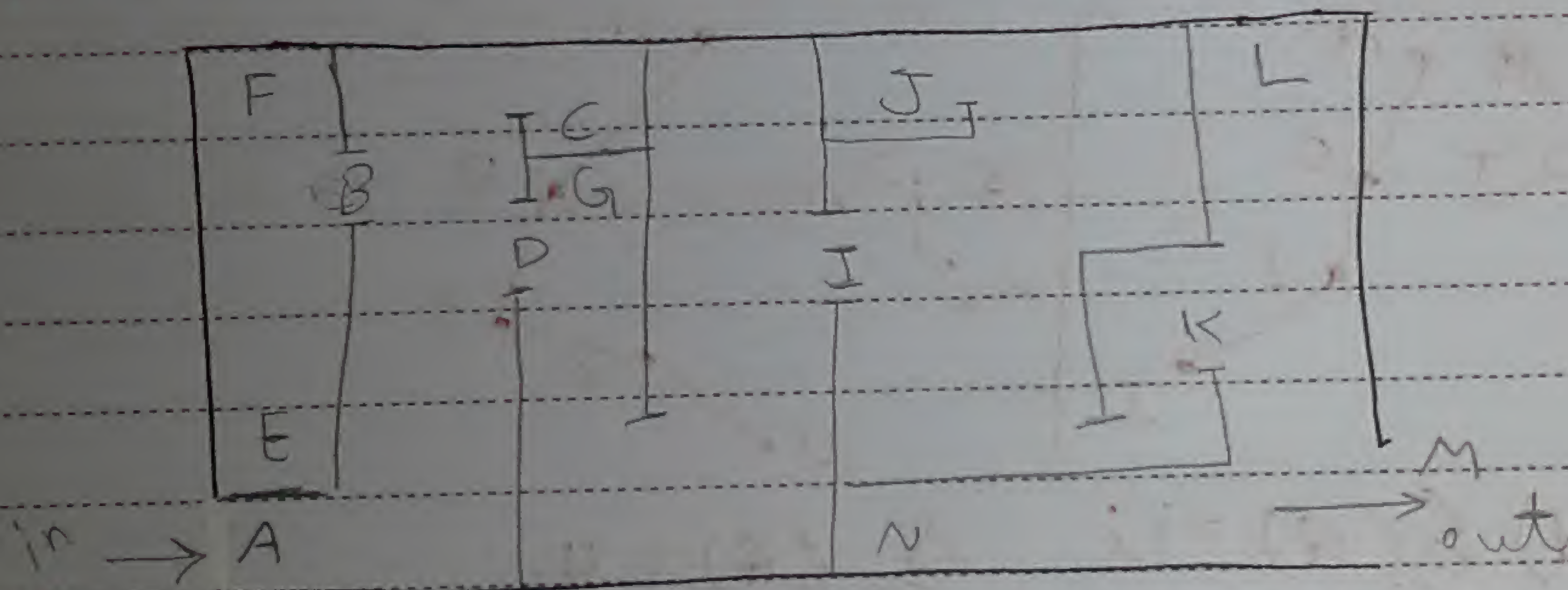
وإذا تحقق أنه $E(G_i) > E(G_{i+1})$ نضع

$$H = G_i$$

(لو نضع وطم تأثر على E يمكنه الجديدة هي H)
(إذا طم نضع وتأثر على E يمكنه القديمة هي H)

Example

a person visit a shopping center with seven departments A, B, C, ..., M as in figure



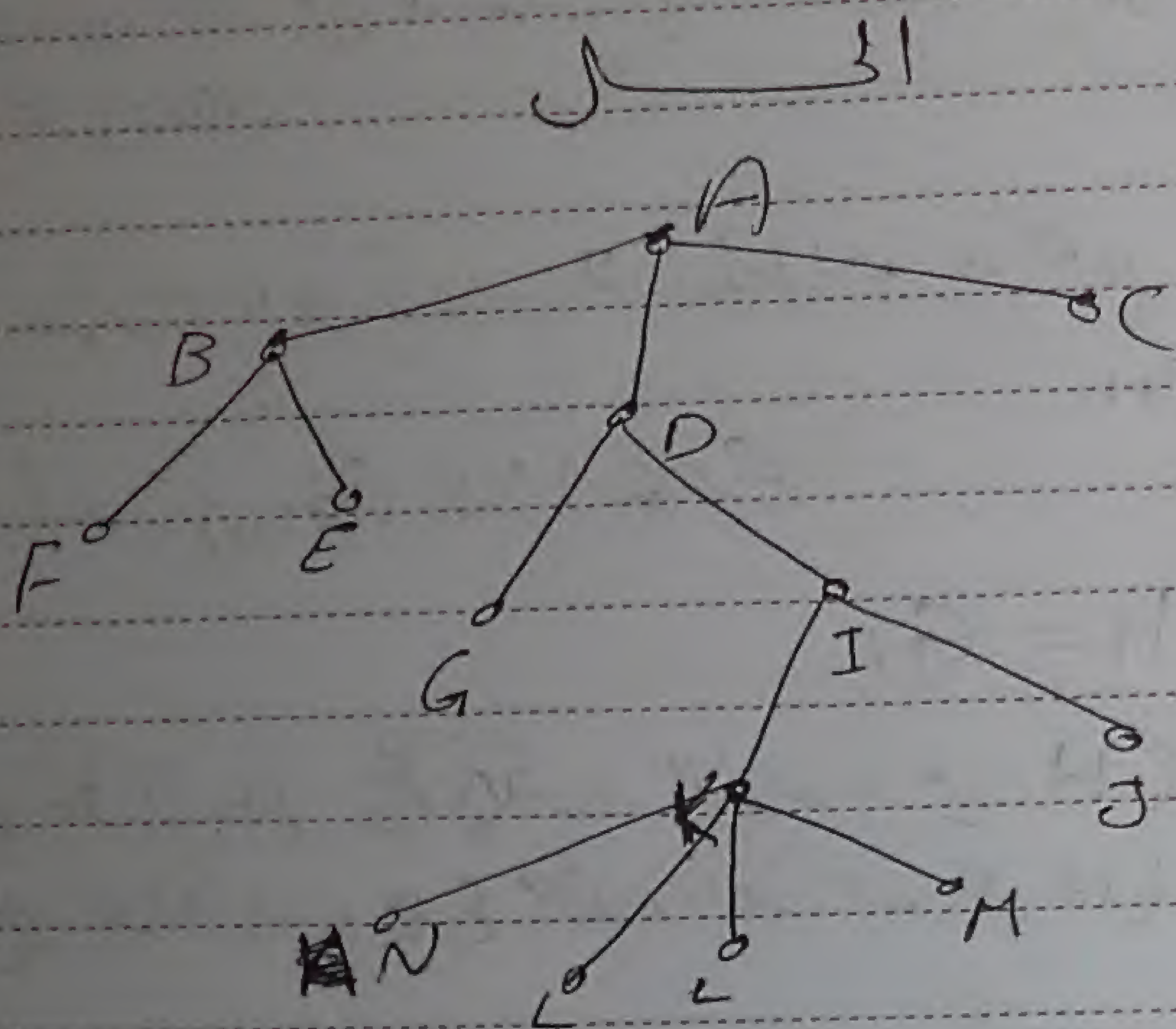
a) Find the graph which edges are away of moving between departments

b) From the graph, find the node with maximal number of examining department moving.

c) Find the path between A and N, A and J from the graph.

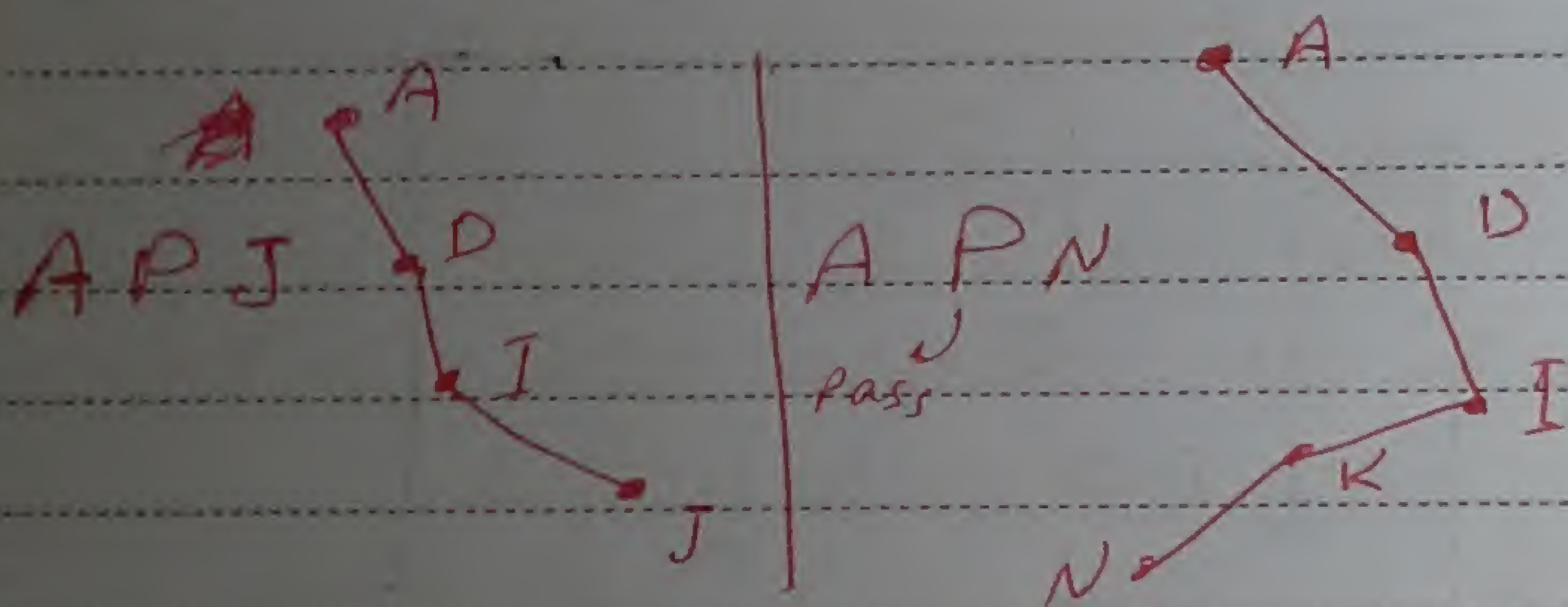
d) $S(G)$, $\Delta(G)$, $E(G)$, $d(G)$

a)



b) Node K is max examining department

c) The path Between A and N



d) $S(G) = 1$; $\Delta(G) = 4$

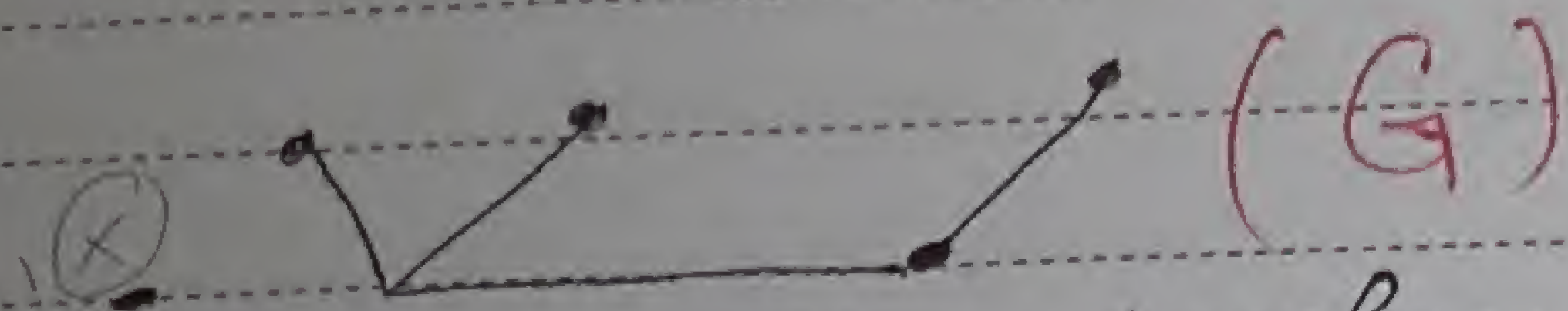
اقل درجه بیش درجه

$E(G) = 12$ 13 یاس

$d(G) = \frac{1}{13} [3 + 3 + 3 + 1 + 1 + 1 + 1 + 3 + 1 + 4 + 1 + 1 + 1]$

A B D C E F G I J
K N L M

Ex: From the graph G



Find a subgraph H satisfies

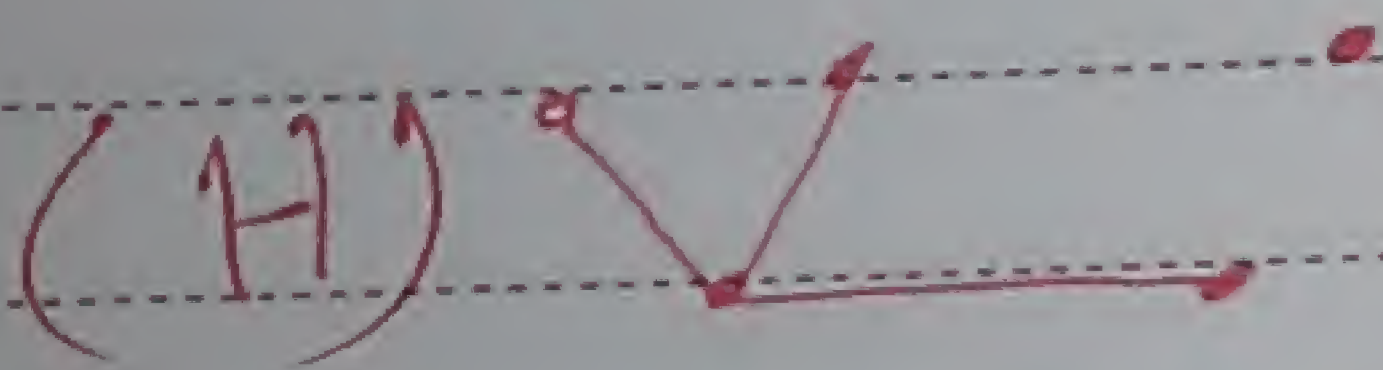
$$\delta(H) \geq \epsilon(H) \geq \epsilon(G)$$

الحل

$$\textcircled{1} \epsilon(G) = \frac{4}{6} \quad \delta(G) = 0$$

أحذف أقل درجته الرؤوس

$$\textcircled{2} \delta(H) = 1$$



$$\epsilon(H) = \frac{4}{5}$$

$$\delta(H) \geq \epsilon(H) \geq \epsilon(G) \quad \checkmark \checkmark \text{ الشرط تحقق }$$

Then H is a subgraph satisfy the condition

17/11/2014

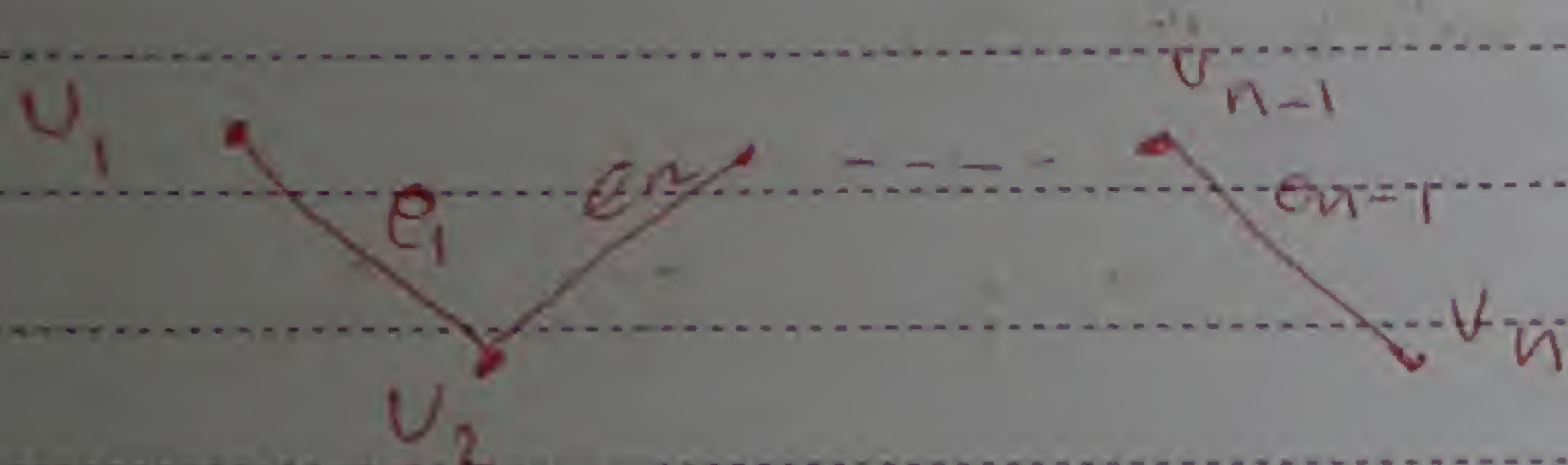
السنة

د. محمد شكري

محاضرة [6]

Path and cycles:-

الأسار والدورات

Defⁿ (Path)① ~~path~~ A path in a graph $P = (V, E)$ $E = \{e_1, e_2, \dots, e_{n-1}\}; V = \{v_1, \dots, v_n\}$ linked v_1 to v_n .② A cycle C^n Is a path with $v_1 = v_n$.

بمنطقية نقطة

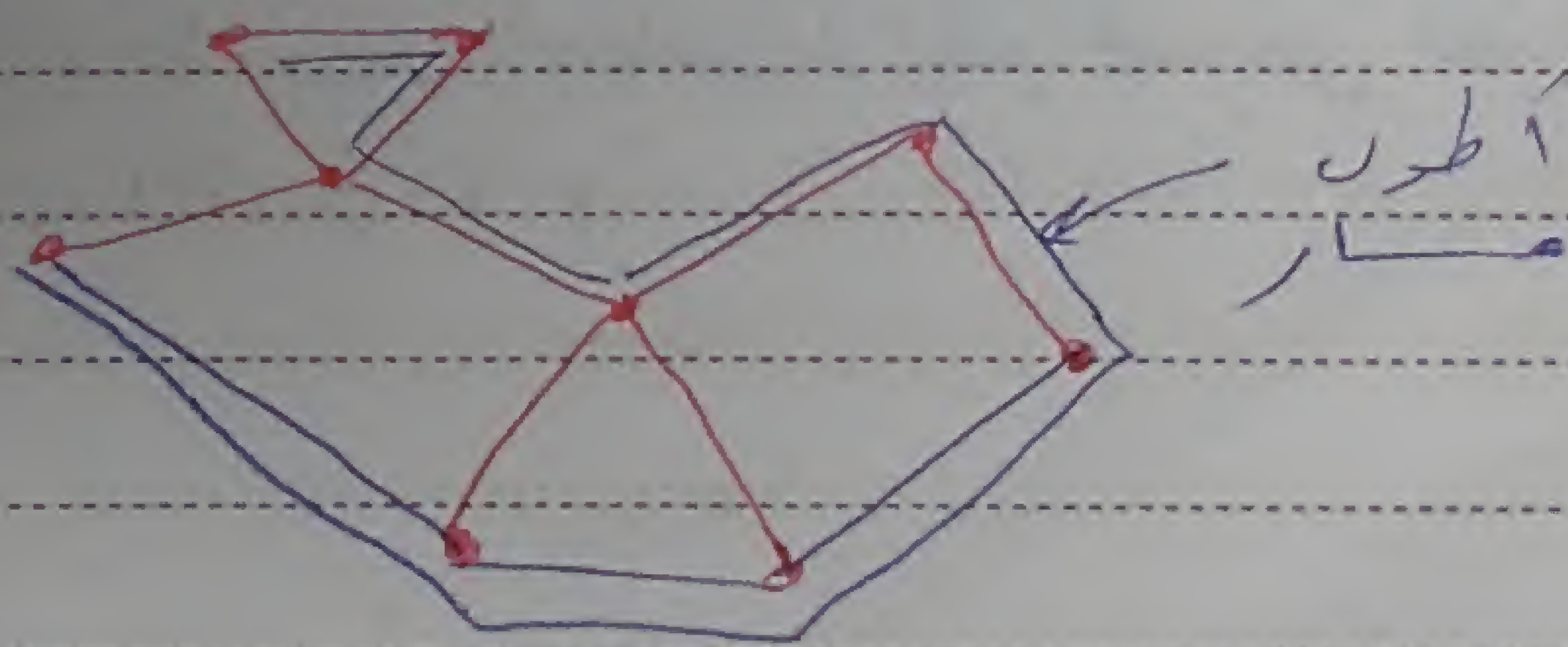
* المسار في خط هو جزء من الحافة ينتهي عند الرأس

مرتبة أو على طرف واحد مرتبة

* عند تعميم هذه الخاصية يسمى الـ path ← walk وهو

بمعنى أنه في الـ walk يمكن تكرار الرؤوس والأضلاع

* المسار المغلق هو مسار تقطع بدايته من نقطة نهايته



Proposition 1:-

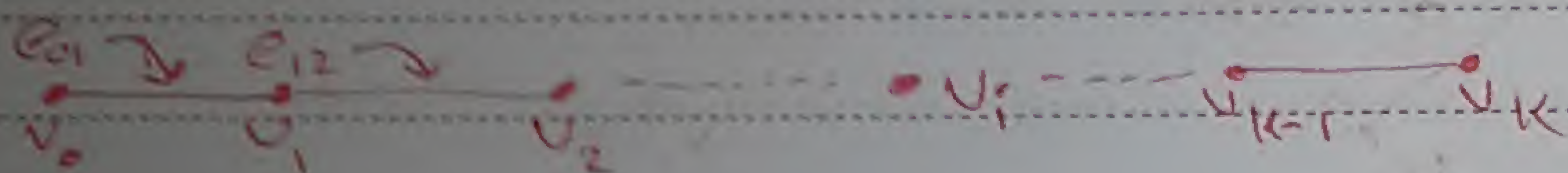
Every graph G can contain a path of length $\delta(G)$ and a cycle of length $\delta(G)+1$ if $\delta(G) \geq 2$.

$\delta(G)$ أقل درجة في G

طول المسار = عدد edges على

المسار

Let $P = v_0 e_1 v_1 e_2 \dots e_{k-1} v_k$ be the largest path in G .



طول المسار k

$$k \geq d(v_i) \geq \delta(G) \Rightarrow (1)$$

بفرض k طول المسار k والنقطة v_i تقع على هذا المسار. إذا كانت v_i مرتبطة بجميع رؤوس المسار أو أكبر عدد منها فإنه العبارة (1) تتحقق.

~~العبارة (1) تتحقق~~

إذا كانت أقل درجة في G فبعض الرؤوس التي تتصل بها v_i هي رؤوس المسار. أي أنك يمكنك عمل مسار

مميز في طول $\delta(G)+1$

وهذه المسار يمر على كل رؤوس المسار. يتم عمل المسار بحرف فيكون طول المسار $\delta(G)+1$

$$k \geq d(v_i) \geq \delta(G) \quad (1)$$

if $v_i \in P$ for all $i=1, 2, \dots, k$
all neighbours of v_i satisfies (1)

if $i < k$ is a minimal with $e_{ik} \in E(P)$
Then P is a cycle of length at least
 $\delta(G+1)$.

* مغلقة المسار أو مسار مغلق Closed Path

Defⁿ Girth-Circumference:-

The minimum Length of a cycle ~~cont~~
~~(contained)~~ in a graph G is th
girth $g(G)$ of G

the maximum Length of a cycle in G
is its Circumference.

Girth

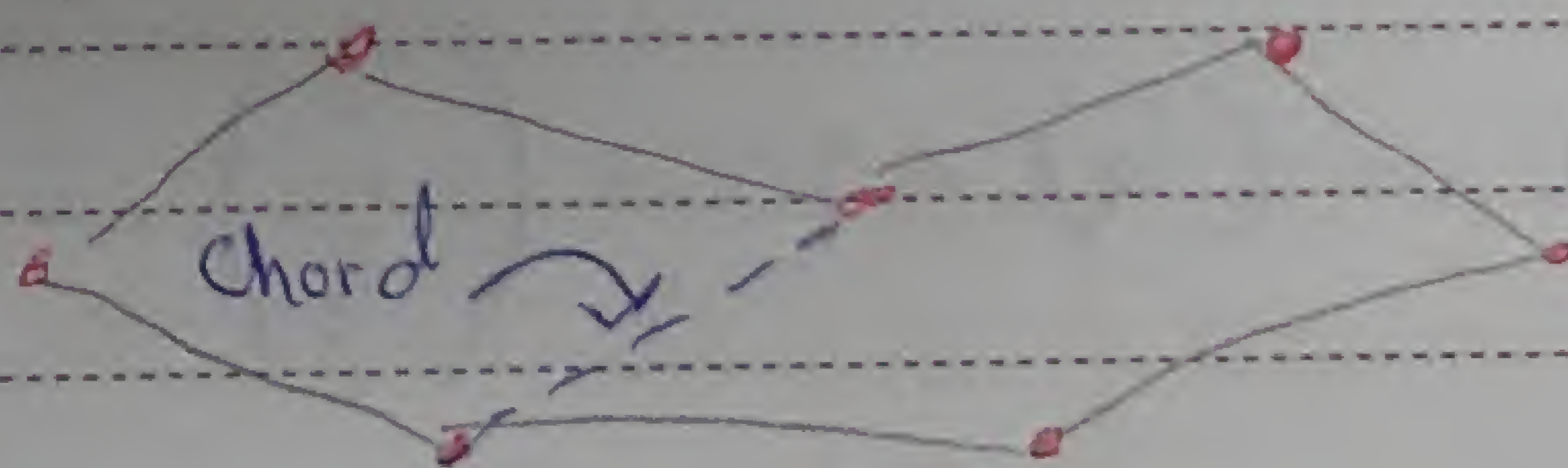
* طول أصغر مسار مغلق بسيط

حجم الحلقة

أقصى

Def (chord):-

هو حرف يمتد بين رأسين من رؤوس المسار المغلق بحيث يقطع المسار
مثلاً: أضلع من أضلاع المسار



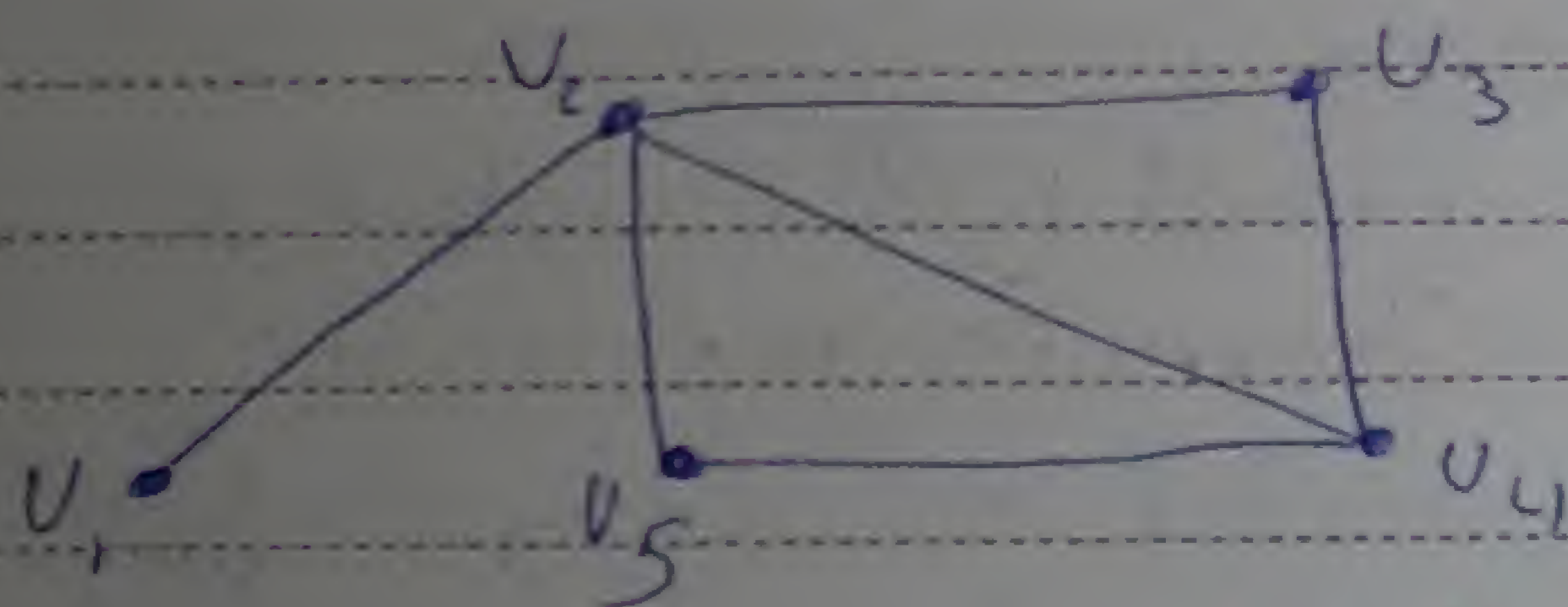
وهذا الحرف المضاف لا يكوّن مع أضلاع المسار المغلق

Def (Diameter of G)
 the greatest distance between any two
 vertices in G is the Diameter of G

هو طول أكبر مسافة بين أي نقطتين في G

example:-

Find the diameter of the graph



المثل

The distance Matrix.

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_1	0	1	2	2	2
v_2	1	0	1	1	1
v_3	2	1	0	1	2
v_4	2	1	1	0	1
v_5	2	1	2	1	0

مصفوفة
 المسافات
 بين الرؤوس
 التي يجب
 حسابها

Vertex أكبر مسافة عنه كل
 $\max \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$
 $\rightarrow v_1$
 $\rightarrow v_2$
 $\rightarrow v_3$
 $\rightarrow v_4$
 $\rightarrow v_5$

diameter $\text{diam}(G) = \max \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2$

Defⁿ (Radius)

$$\text{rad}(G) = \min(\max d_G(x, y))$$

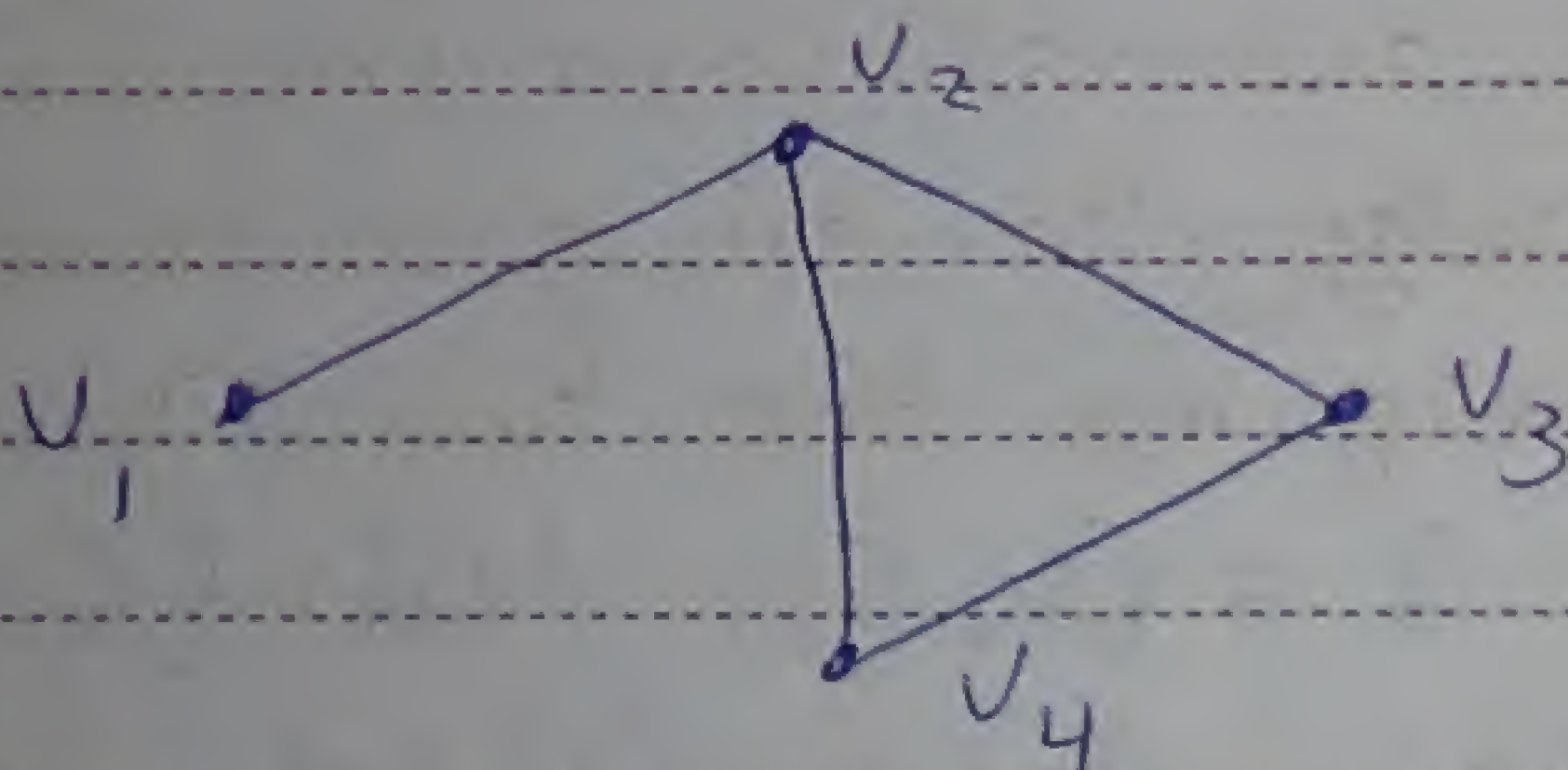
$$x \in V(G), y \in V(G)$$

(نقطه مرکزی به بیشترین فاصله)

~~$$\text{rad}(G) = \min \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 1$$~~

Example: Find the radius of the following graph

⇒ graph

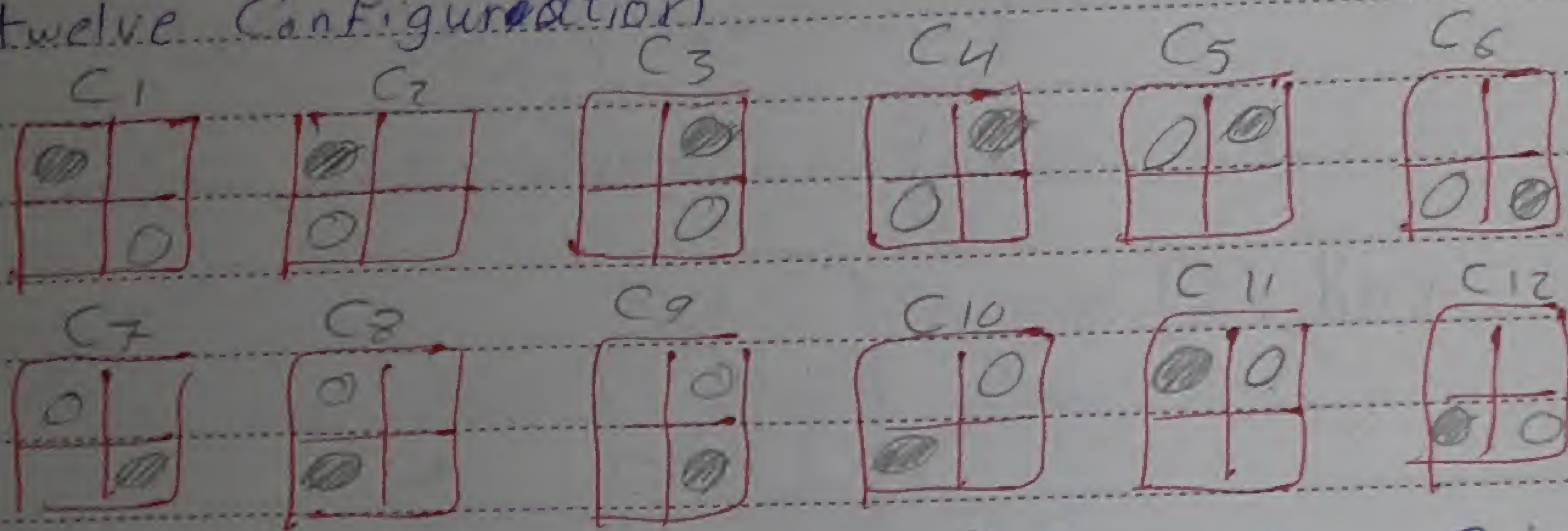


the Distance Matrix

$$\begin{matrix} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \Rightarrow \max \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{rad } G = \min \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 1$$

Ex: Suppose that we have two coins, one silver and one gold, placed on two of four square 2×2 checkboard. These are twelve configurations.



where "●" is gold coin; "○" is silver coin.

A configuration can be transformed into other, according to rules:-

- [1] move one of coins in C_i horizontally or vertically to an unoccupied square.
- [2] interchanging the two coins in C_i configuration

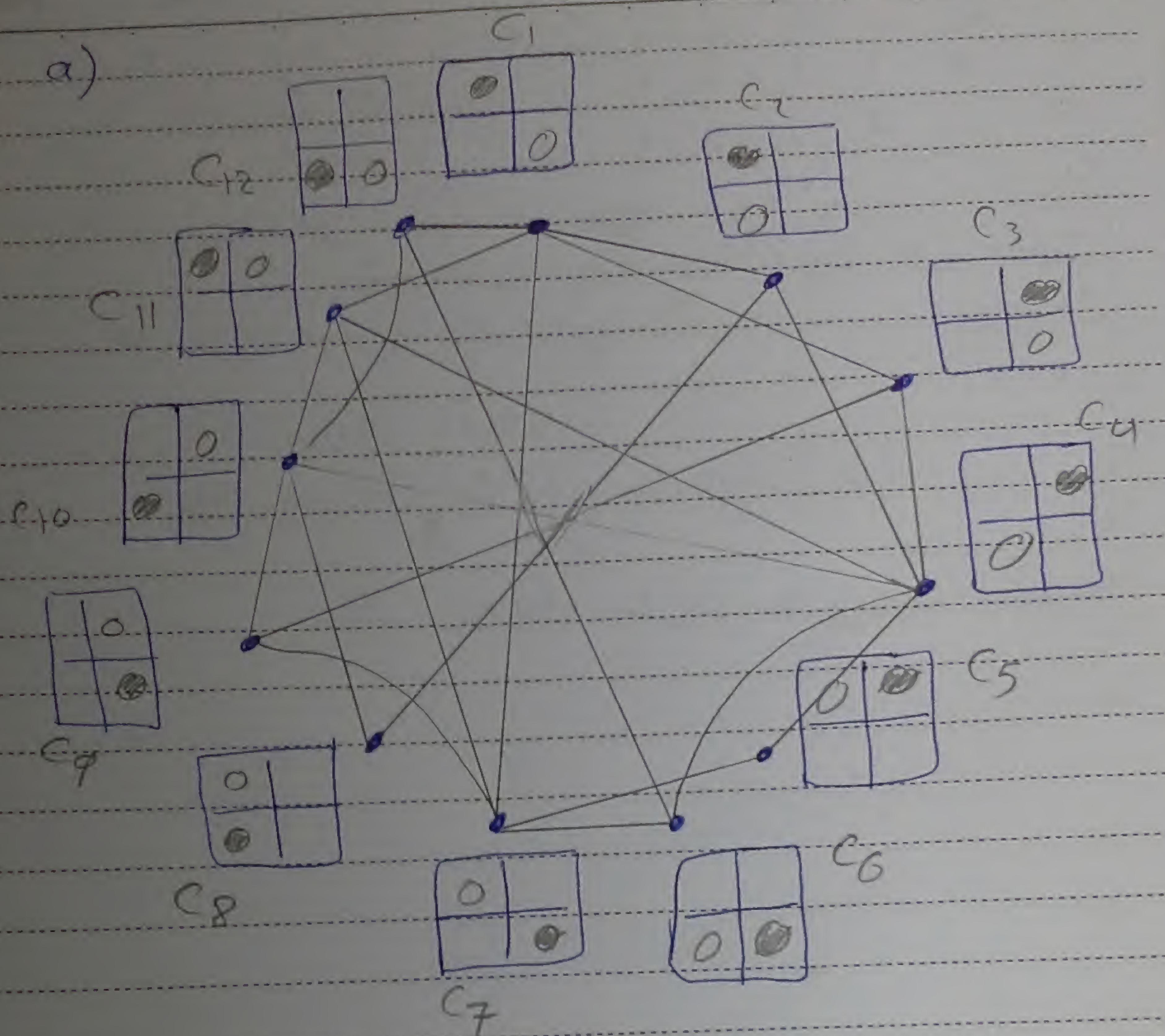
a) F in $G \equiv (V, E)$; $V(G) = \{C_1, C_2, \dots, C_{12}\}$

b) $N_G(C_i)$; $\Delta(G)$, $\delta(G)$

c) distance matrix

d) girth $g(G)$, $\text{diam}(G)$

→ Solution



b) $N_G(5) = \{C_4, C_7, C_{11}\}$ C_5 الجيران المباشرين لـ 5

$$\Delta(5) = 5$$

$$\delta(G) = 3$$

\Rightarrow Continue

Home Work

على لوحة نظريتي 3×3 ~~ليوجد~~ أوجد المركبات الممكنة لوزير بيرويلك

من هذه المركبات تبج قواعد النظريتي Graph

أو $N_G(v)$; $\Delta(G)$, $\delta(G)$

Distance Matrix

$\#$) $grith$, $g(G)$, $diam(G)$

حيث الوزير لا يقل المسافة